Manuel López Mateos

Límite

López
Mateos
editores

Manuel López Mateos

Límite

López Mateos editores

2018

Ilustracion de la tapa: Detalle de *New World*, acrílico en tela. Mateu, 1996.

Segunda edición, 2018, en López Mateos Editores
©2013 López Mateos Editores, s.a. de c.v.
Matamoros s/n
Primera Sección
Xadani, Oax
C.P. 70125
México

ISBN 978-607-95583-8-3

Información para catalogación bibliográfica:
López Mateos, Manuel.
Límite / Manuel López Mateos — 2a ed.
iv–46 p. cm.
ISBN 978-607-95583-8-3
1. Matemáticas 2. Cálculo diferencial e integral 3. Límite 4. Funciones reales I. López Mateos, Manuel, 1945- II. Título.

Todos los derechos reservados. Queda prohibido reproducir o transmitir todo o parte de este libro, en cualquier forma o por cualquier medio, electrónico o mecánico, incluyendo fotocopia, grabado o cualquier sistema de almacenamiento y recuperación de información, sin permiso de López Mateos Editores, s.a. de c.v.

Producido en México

López Mateos editores

https://limite.mi-libro.club

ISBN 978-607-95583-8-3

Índice general

Introducción

La primera edición de esta obra fue publicada en México, en el año de 1973, como parte de la serie Temas Básicos preparada por la Asociación Nacional de Universidades e Institutos de Enseñanza Superior (ANUIES) en el Programa Nacional de Formación de Profesores.

El propósito es explicar el concepto formal de LÍMITE. El lenguaje que utilizaremos está debidamente expuesto en el folleto *Funciones reales*[4].

Proponemos que la sección 1.3 y los ejercicios al final de cada sección sean material de investigación, a realizar en grupos.

Este folleto debe leerse despacio y discutirse. Ayudará tener papel y lápiz a la mano.

Agradezco la colaboración de Axel Eduardo Becerril Nájera en la tipografía y de Leonardo Camacho Villalón en la corrección de errores.

Manuel López Mateos
manuel@cedmat.net
http://cedmat.net
14 de octubre de 2018

Capítulo 1

Límite

Todas las funciones de que se hable tendrán como dominio y contradominio a $\mathbb{R}$ a menos que se indique lo contrario además utilizaremos la expresión *función* para la función misma, su regla de correspondencia o su gráfica. Creemos que el contexto evitará cualquier confusión.

1.1. El significado de $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

La expresión $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ se lee *el límite de* f *de* x *es infinito cuando* x *tiene a infinito* o f *de* x *tiende a infinito cuando* x *tiende a infinito*.

Antes de discutir el significado que los matemáticos dan a

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

trataremos de aclarar el conocimiento intuitivo que indudablemente cada uno tiene de la expresión en cuestión.

Esto nos pondrá en condiciones de entender el concepto que no es otra cosa que la formalización del conocimiento intuitivo.

Todos estamos de acuerdo con que si nos piden dibujar la gráfica de una función que tenga como límite ∞ cuando x tiende a ∞, dibujaríamos algo como la figura (1.1) de la página siguiente. Esto es, daríamos como definición que *el*

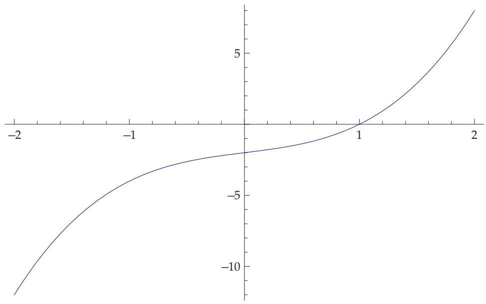


Figura 1.1 La función $y = x^3 + x - 2$ tiende a ∞ cuando $x \to \infty$.

límite de una función es ∞ *cuando* x *tiende a* ∞ *si a valores cada vez más grandes de* x *corresponden valores cada vez más grandes de* $f(x)$.

Ciertamente la función de la figura (1.1) cumple con esta *definición* como se ilustra en la figura (1.2). Si consideramos *cualquier* punto x_0 en el dominio, resulta que *a cada* $x_1 > x_0$ corresponde un valor $f(x_1) > f(x_0)$.

Sin embargo, con esta definición hemos dejado a un lado funciones como la de la figura (1.3).

Cada lector estará de acuerdo con que la función de la figura (1.3) también tiende a ∞ cuando x tiende a ∞. Esta

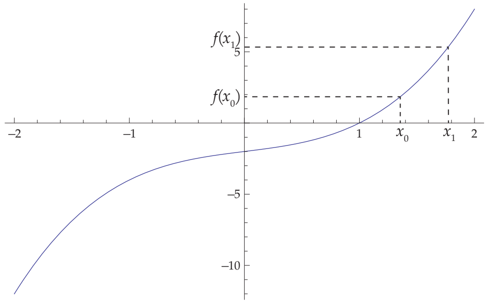


Figura 1.2 Si $x_1 > x_0$ entonces $f(x_1) > f(x_0)$.

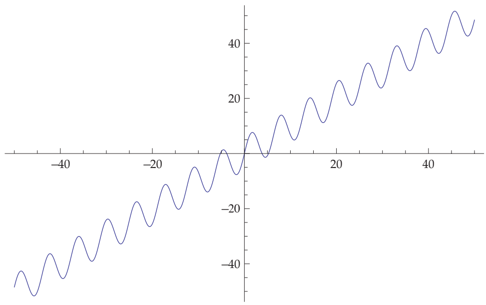


Figura 1.3 ¿Acaso la función $y = x + 6 \operatorname{sen} x$ no tiende a ∞ cuando $x \to \infty$?

función se ha dejado a un lado porque no cumple la definición que hasta ahora hemos adoptado para $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

No la cumple porque hay valores, llamémosle a alguno de ellos x_0, para los que *algún* punto $x_1 > x_0$ no les corresponde $f(x_1) > f(x_0)$ como lo muestra la figura (1.4). Podemos decir que hay puntos a la *derecha* de x_0 a los cuales les corresponden puntos *abajo* de $f(x_0)$. Sin embargo la función ¡tiende a ∞ cuando x tiende a ∞!

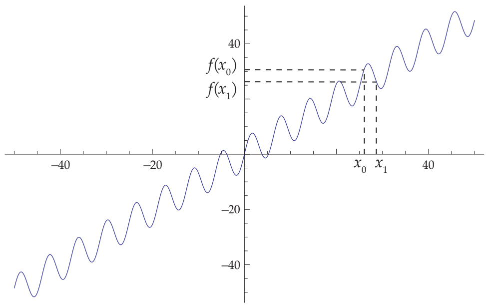


Figura 1.4 El punto x_1 es mayor que x_0 sin embargo $f(x_1)$ no es mayor que $f(x_0)$.

Tratemos de mejorar nuestra definición. Podríamos decir: $f(x)$ tiende a ∞ cuando x tiende a ∞ si *a partir de un punto* x_0 en el dominio todos los puntos a la derecha toman *valores mayores* que $f(x_0)$.

Según esta definición las funciones de la figuras (1.1) y (1.3) tienden a ∞ cuando x tienden a ∞. El inconveniente de la definición es que *deja tender a* ∞ a demasiadas funciones. La función de la figura (1.5) cumple con la definición propuesta y sin embargo algo nos dice que no tiende a ∞ cuando x tiende a ∞ (cuando más tenderá a 1).

Parece que un mejor enfoque consiste en pensar una función que tiende a ∞ cuando x tiende a ∞ como una que a partir de cierto punto *suba tanto como queramos*.

Pero ¿qué quiere decir que suba tanto como queramos?, pues que alcance valores mayores que cualquier número M prefijado sin importar lo grande que este sea. La frase *a partir de cierto punto* quiere decir que existe un número N que depende del valor de M tal que a los números a

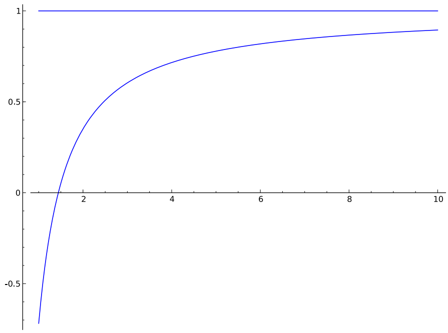


Figura 1.5 $y = -e^{1/x} + 2$ no tiende a ∞ cuando $x \to \infty$

la derecha de N les corresponden valores mayores que el número M prefijado.

Proponemos entonces la siguiente definición

> El límite de $f(x)$ es ∞ cuando x tiende a ∞ si para *cualquier* número M (tan grande como se quiera) existe *algún* número N (que depende del valor de M) tal que si $x > N$ entonces $f(x) > M$.

La figura (1.6) aclarará la definición.

Esta definición *impide* que la función de la figura (1.7) tienda a ∞ cuando x tiende a ∞ porque podemos encontrar a lo menos una M, por ejemplo $M = 2$, de manera que *no hay* un cierto punto N tal que los puntos a la derecha de N tomen valores arriba de 2. Es decir los puntos a la derecha de *cualquier* N toman valores abajo de 2.

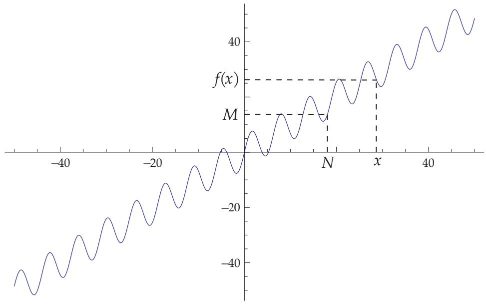


Figura 1.6 Dado M es posible hallar N tal que si $x > N$ entonces $f(x) > M$.

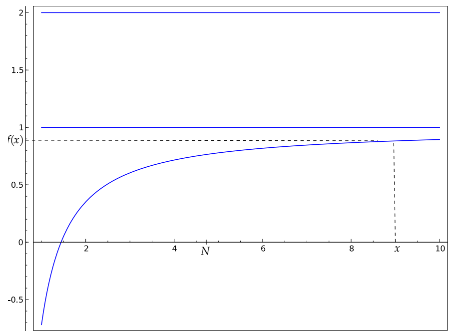


Figura 1.7 Dado $M = 2$ no importa que N tomemos, por más a la derecha que vayamos con $x > N$ nunca lograremos que el valor de la función en x esté arriba de 2.

Pues sí, la definición propuesta es el significado que los matemáticos dan a $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Daremos la definición formal:

Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diremos que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ si y sólo si para toda M existe N tal que si $x > N$ entonces $f(x) > M$.

En este momento, sugerimos al lector que dibuje funciones y diga, basándose en la definición, si tienden o no a ∞ cuando x tiende a ∞.

Veamos algunos ejemplos.

1.1. Ejemplo. Sea f la función *identidad* de $\mathbb{R}$ es decir $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x$. Tenemos que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ porque si damos M arbitrario en el contradominio tomamos $N = M$. Como en la figura (1.8) vemos que si $x > N = M$ entonces $f(x)$ que es x, es mayor que M.

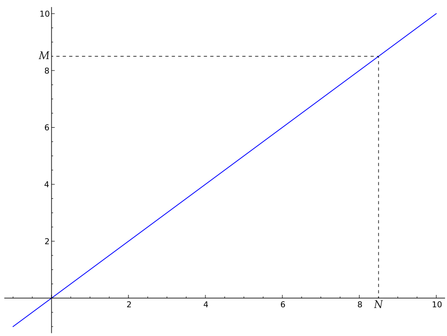


Figura 1.8 Para la función *identidad*, dado M hacemos $N = M$. Si $x > N$, como $f(x) = x$, tendremos $x > M$.

1.2. Ejemplo. Sea $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = x^2$. Tenemos que $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 = \infty$ porque si damos M arbitrario basta con que, como en la figura (1.9), hagamos $N = +\sqrt{M}$ para que si $x > N$, o sea $x > +\sqrt{M}$, entonces elevando al cuadrado ambos miembros de la desigualdad se obtiene que $x^2 > M$ pero $x^2 = g(x)$, es decir que $g(x) > M$.

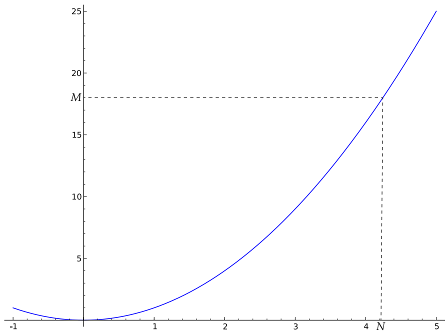


Figura 1.9 Dado M, si $x > N = \sqrt{M}$ entonces $x^2 > M$.

Ejercicio 1.1. Demuestra que $\lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$.

Ejercicio 1.2. Demuestra que $\lim_{x\to\infty} x + 1 = \infty$.

Ejercicio 1.3. ¿Cómo definirías $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$?

Ejercicio 1.4. ¿Cómo definirías $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$?

Ejercicio 1.5. ¿Cómo definirías $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$?

Sugerimos que los ejercicios 3, 4 y 5 se realicen en grupos y se comparen resultados.

1.2. El significado de $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$

La expresión $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ se lee *el límite de* f *de* x *es* L *(*$L \in \mathbb{R}$*) cuando* x *tiende a infinito* o f *de* x *tiende a* L *cuando* x *tiende a* ∞.

Tratemos de seguir el método de la sección anterior para entender el significado de la expresión que nos ocupa.

Es posible que al imaginarnos la gráfica de una función que tienda a L cuando x tiende a ∞ se nos ocurran dos versiones, como en la figura (1.10). Entonces nuestra defi-

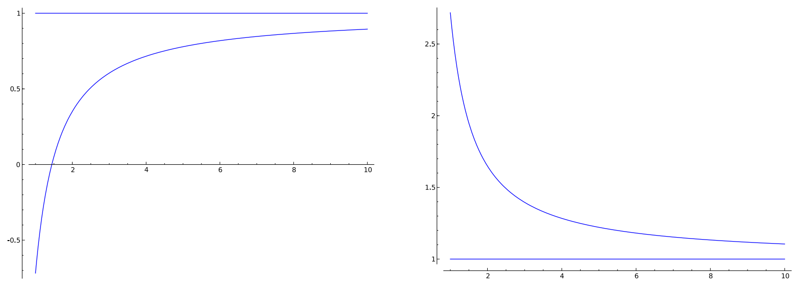


Figura 1.10 La función puede acercarse por abajo o por arriba.

nición debe tomar en cuenta que $f(x)$ puede *acercarse* a L tanto por *abajo* como por *arriba*.

El primer intento de definición podría ser: $f(x)$ tiende a L cuando x tiende a ∞ si y sólo si para *cualquier* punto x_0 en el dominio de la función, los puntos x a su derecha tengan imagen $f(x)$ *más cerca* de L que la imagen de $f(x_0)$, es decir que $d\big(f(x), L\big) < d\big(f(x_0), L\big)$.

La funciones de la figura (1.11) cumplen con esta definición.

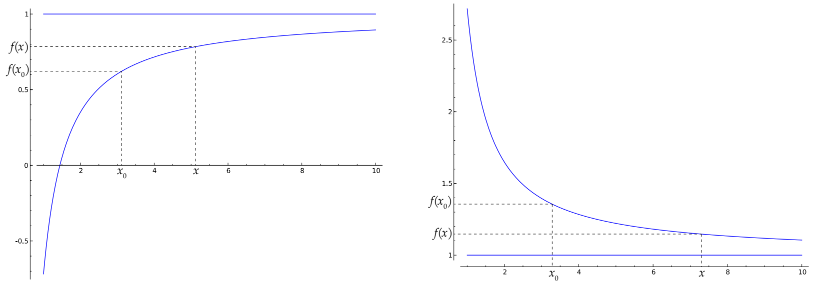


Figura 1.11 Ambas funciones cumplen la definición propuesta, conforme x se aleja $f(x)$ se acerca a L.

En ambos casos, todos los puntos x a la derecha de x_0 cumplen con $d\big(f(x), L\big) < d\big(f(x_0), L\big)$. Sin embargo muchas funciones que según nosotros tienden a L cuando x tiende a ∞ no cumplen con la definición propuesta. Todos los lectores estarán de acuerdo con que la función de la figura (1.12) tiende a 0 cuando $x \to \infty$.

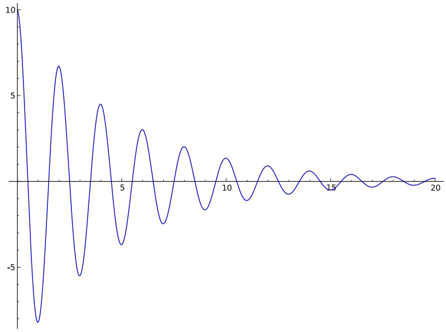


Figura 1.12 Estarán de acuerdo en que $y = 10e^{-0.2x}\cos \pi x$ tiende a 0 cuando $x \to \infty$.

A pesar de eso, es posible elegir *algún* punto x_0 para el cual no todas las imágenes de puntos a la derecha distan de L en menos que la distancia $f(x_0)$ a L; es decir, que haya por lo menos *algún punto*, llamémosle x, a la derecha de x_0 tal que $d\big(f(x), L\big)$ no sea menor que $d\big(f(x_0), L\big)$ o lo que es lo mismo, que exista algún punto $x > x_0$ tal que $d\big(f(x), L\big) \geqslant d\big(f(x_0), L\big)$. La figura (1.13) muestra esto.

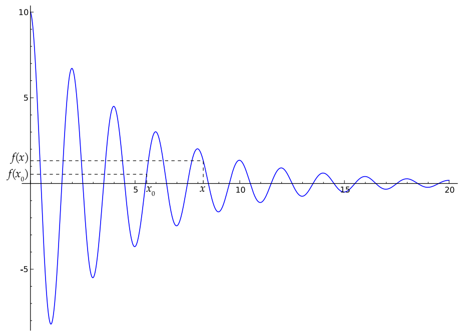


Figura 1.13 Es posible hallar x_0 en el dominio tal que no todos los puntos a la derecha tienen imagen más cerca de 0 que $f(x_0)$.

Parece que el error en la definición propuesta es pedir que para *cualquier* punto de x_0 en el dominio de la función, si $x > x_0$ entonces $d\big(f(x), L\big) < d\big(f(x_0), L\big)$.

Si analizamos las funciones de la figura (1.10) veremos que hay *algunos* puntos x_0 tales que si $x_0 < x$ entonces $d\big(f(x), L\big) < d\big(f(x_0), L\big)$. (Dejamos como ejercicio que el lector señale dichos puntos.)

Entonces se nos ocurre corregir la definición y decir: $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ si y sólo si hay *algún* punto x_0 tal que *todos* los puntos a la derecha de x_0 vayan a dar, bajo la función, más cerca de L que $f(x_0)$, es decir que si $x > x_0$ entonces $d\big(f(x), L\big) < d\big(f(x_0), L\big)$.

El *inconveniente* de esta definición es que *deja* tender a L, cuando $x \to \infty$, a demasiadas funciones. Un ejemplo es la función de la figura (1.14).

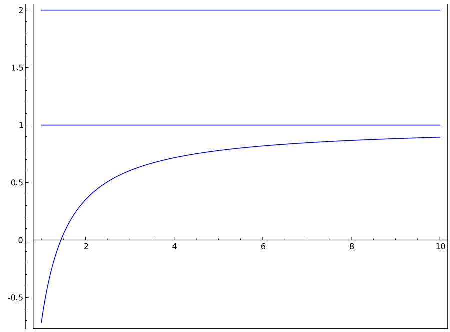


Figura 1.14 Es cierto que mientras x está más a la derecha f(x) se *acerca* más a 2, pero nadie diría que la función tiende a 2. (Cuando más a 1.)

Pedimos al lector que colabore a demostrar que esta función cumple la última definición propuesta:

Localiza en la figura (1.14) algún punto x_0 en el dominio de la función y localiza la imagen correspondiente $f(x_0)$ en el contradominio. Ahora bien, fíjate que la distancia de la imagen de cualquier punto x que esté a la derecha de x_0 a 2, es menor que la distancia de $f(x_0)$ a $L = 2$; es decir, si $x > x_0$, entonces $d\big(f(x), 2\big) < d\big(f(x_0), 2\big)$.

Hemos verificado que esta función cumple la definición y el lector estará de acuerdo con que esta función *no* tiende a $L = 2$. Tenderá a $L - 1 = 1$ pero no a $L = 2$.

Es conveniente pensar si nuestro planteamiento es correcto o no. Según se ha demostrado, hasta ahora no lo es. El hecho de que a valores cada vez más alejados del origen corresponden, bajo la función, valores más cercanos a L, *no* nos garantiza, como es el caso de la función de la figura (1.14), que estos valores estén *tan cerca como queramos* de L. ¡He aquí el meollo! Debemos exigir que, a partir de cierto punto, los valores de la función estén tan cerca como queramos de L; no importa si arriba o abajo de L, sino que estén *tan cerca como queramos* de L. Es decir que, a partir de cierta N, los puntos a la derecha vayan a dar, bajo la función, a puntos dentro de una *vecindad prefijada* de L, sin importar lo pequeña que esta sea, es decir, sin importar que su radio sea un número muy pequeño.

Proponemos entonces la siguiente definición:

Decimos que $f(x)$ tiende a L cuando x tiende a ∞ si y sólo si, dada cualquier vecindad de L existe algún número N tal que si $x > N$ entonces $f(x)$ es un elemento de la vecindad dada.

Ilustramos esto en las siguientes figuras donde al radio de la vecindad prefijada le llamamos ε, asi $V_\varepsilon(L) = (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

Escribamos la definición en su versión formal:

Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diremos que $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ si y sólo si, para toda vecindad $V_\varepsilon(L)$ existe N tal que si $x > N$ entonces $f(x) \in V_\varepsilon(L)$.

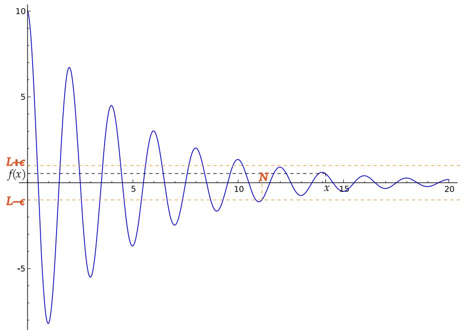


Figura 1.15 Para cierta N, si $x > N$ entonces $f(x)$ está en la vecindad prefijada de L.

Nótese que decir $f(x) \in V_\varepsilon(L)$ es equivalente a decir $d\big(f(x), L\big) < \varepsilon$. Tomando esto en cuenta podemos reescribir la definición de la siguiente manera:

> Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diremos que $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ si y sólo si, para todo $\varepsilon > 0$ existe N tal que si $x > N$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Nuevamente pedimos al lector que dibuje funciones y que, dado un real L, compruebe si tienden o no a L cuando $x \to \infty$.

2.1. Ejemplo. Sea $L \in \mathbb{R}$. Consideremos la función constante $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = L$. En la figura (1.16) vemos la gráfica de la función. Mostraremos que $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$.

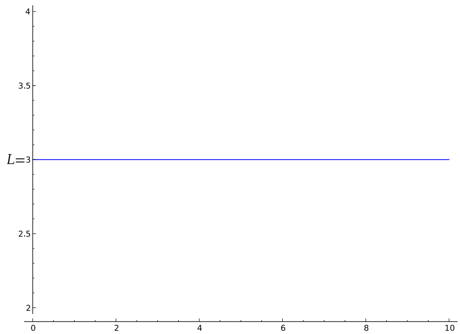


Figura 1.16 Para cualquier N, si $x > N$ entonces $f(x) = L$ está en la vecindad prefijada de L.

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. En este caso podemos considerar N como cualquier número real. Si $x > N$, entonces $f(x) = L$ y por lo tanto $d\big(f(x), L\big) = d(L, L) = 0 < \varepsilon$. ♦

2.2. Ejemplo. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$. Demostraremos que $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = 1$. Sugerimos al lector que dibuje la gráfica de la función empleando la figura (1.17). Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Hagamos $N = \frac{1}{\varepsilon}$. Tenemos que demostrar que si $x > N$, es decir si $x > \frac{1}{\varepsilon}$, entonces $d\left(1 + \frac{1}{x}, 1\right) < \varepsilon$.

Sea $x > N$. Sabemos que

$$d\left(1 + \frac{1}{x}, 1\right) = \left|\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1\right| = \left|\frac{1}{x}\right|;$$

como $\frac{1}{x}$ es positivo (¿por qué?), entonces $\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{x}$ (¿por qué?); es decir, $d\left(1 + \frac{1}{x}, 1\right) = \frac{1}{x}$; pero como $x > \frac{1}{\varepsilon}$ entonces $\frac{1}{x} < \varepsilon$; es decir si $x > N$ entonces $d\left(1 + \frac{1}{x}, 1\right) < \varepsilon$. ♦

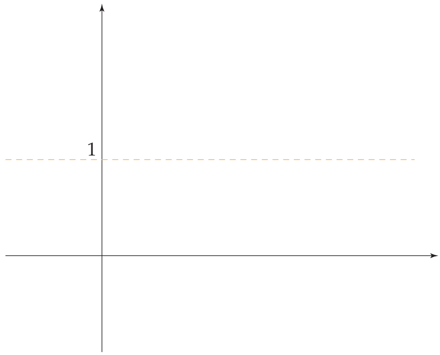


Figura 1.17 Dibuja la gráfica de $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$.

Ejercicio 2.1. En cada una de las figuras (1.10) y (1.12) encuentra al menos tres puntos x_0 tales que para toda $x > x_0$ se tenga

$$d(f(x), L) < d(f(x_0), L).$$

Ejercicio 2.2. ¿Cómo definirías $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = L$? ¿por qué? Se propone que este ejercicio se haga por equipos de trabajo y después se comparen los resultados con los otros equipos.

Ejercicio 2.3. Con la definición dada en el ejercicio anterior, demuestra que $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$.

1.3. El significado de $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$

En esta sección trataremos de que el lector llegue por sí mismo al significado de la expresión $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$. Nosotros sugeriremos algunas definiciones, es misión del lector analizarlas y dando ejemplos y contra ejemplos determinar si estamos dando una *definición adecuada*.

La expresión $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ se lee, como ya todos suponen, *el límite de* f *de* x *es infinito cuando* x *tiende a* a o f *de* x *tiende a infinito cuando* $x \to a$.

Pedimos al lector que use la figura (1.18) para dibujar una función que tienda a ∞ cuando $x \to a$. ¿Estás seguro de que lo dibujado es una función? ¿Cuál es el dominio de esa función?

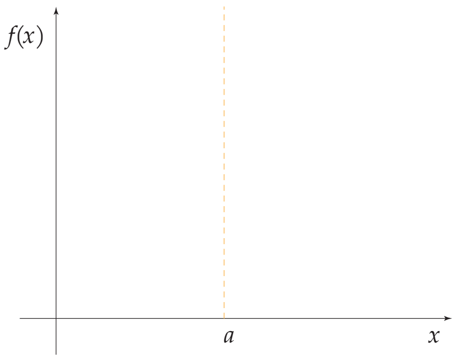


Figura 1.18 Dibuja la gráfica de una función que tienda a ∞ cuando $x \to a$.

Proponemos la siguiente definición,

$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ si y sólo si *para toda* $x \in D_f$ las imágenes de los puntos x tales que $d(x,a) < d(x_0,a)$ cumplen con $f(x) > f(x_0)$.

¿Cumple la función que dibujaste en la figura (1.18) con la definición propuesta? Explica.

¿Por qué no cumple la función de la figura (1.19) con la definición propuesta?

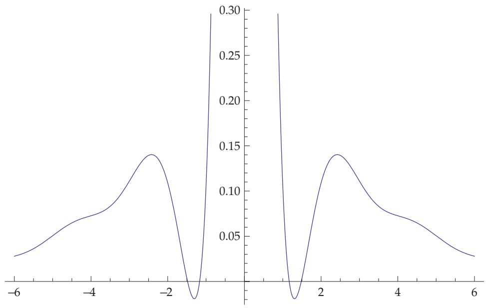


Figura 1.19 ¿$(x - 1.5\,\mathrm{sen}^3\,x)/x^3 \to \infty$ cuando $x \to 0$?

¿Cómo corregirías la definición de tal manera que la función de la figura (1.19) la cumpliera?

Comprueba que la función de la figura (1.19) cumple con la definición corregida.

¿Por qué crees que nos interesa que la función de la figura (1.19) cumpla la definición?

Proponemos la siguiente definición:

$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ si y sólo si existe algún $x_0 \in D_f$ tal que si $d(x, a) < d(x_0, a)$ entonces $f(x) > f(x_0)$.

¿La función que dibujaste en la figura (1.18) cumple con esta definición? Explica (dibuja si es necesario).

¿La función de la figura (1.19) cumple con la definición propuesta? Explica.

¿Por qué la función de la figura (1.20) cumple con la última definición propuesta?

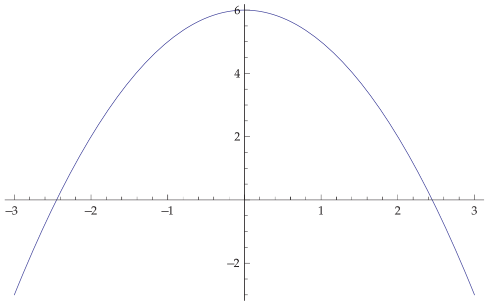


Figura 1.20 ¿Te parece que $6 - x^2 \to \infty$ cuando $x \to 0$?

¿Crees que la función de la figura (1.20) tiende ∞ cuando $x \to a$? ¿Por qué sí o por qué no?

Corrige la definición de tal manera que la función de la figura (1.20) **no** la cumpla y la función de la figura (1.19) **sí** la cumpla.

Comprueba que la función de la figura (1.20) no cumple con la definición corregida y que la función de la figura (1.19) sí la cumple.

¿Por qué crees que nos interesa que la función de la figura (1.20) **no** cumpla con la definición?

Quizás has tenido gran dificultad para efectuar esta última corrección; aún más, es posible que muchos lectores no hallan podido efectuar la corrección deseada. Esto se debe a que el enfoque no ha sido adecuado. Debemos recordar que pedir que la función tienda a ∞ es pedir que *suba* tanto como queramos. Y pedir que la función tienda a ∞ cuando $x \to a$, es pedir que suba tanto como queramos para valores cercanos a a.

Proponemos la siguiente definición:

$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ si y sólo si existe alguna vecindad $V(a)$ de a tal que las imágenes de los puntos $x \in V(a)$ son mayores que cualquier número prefijado M, sin importar lo grande que este sea.

La versión formal de la nueva definición propuesta es: Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ entonces $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ si y sólo si para todo M (no importa que tan grande sea) existe alguna vecindad $V_\delta(a)$ (llamamos δ al radio) tal que si $x \in V_\delta(a)$ (es decir, si $d(x, a) < \delta$) entonces $f(x) > M$.

¿Cuáles de las funciones de las figuras (1.18), (1.19) y (1.20) cumplen con esta definición? Explica por qué.

Fíjate en la figura (1.21). El dominio de la función dibujada es $\mathbb{R} - \{a\}$; es decir, $f(a)$ no está definida.

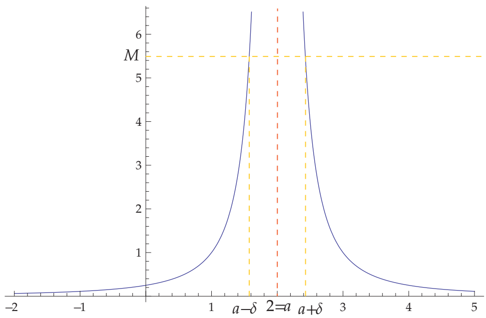


Figura 1.21 La función $f(x) = 1/(x-2)^2$ no está definida en $x = 2$.

Ahora, para $x = a$ tenemos $d(x, a) < \delta$ ya que $d(a, a) = 0$ y δ, por ser el radio de una vecindad, es mayor que 0. Sin embargo, **no** podemos decir que $f(a) > M$. Esto es, la función de la figura (1.21) ¡no cumple la definición! y nos parece que la función sí tiende a ∞ cuando $x \to 2$.

Podemos arreglar esto agregando en la definición que sólo a las x que estén en $V_\delta(a)$ y *que estén en el dominio de la función* serán a las que exigiremos cumplir $f(x) > M$.

La versión formal de la definición corregida es:

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ si y sólo si para toda M existe $\delta > 0$ tal que si $x \in V_\delta(a) \cap D_f$ entonces $f(x) > M$.

¡Ahora sí!, la función de la figura (1.21) **cumple** con esta nueva definición.

Pero esto no es así de fácil. En la figura (1.22) damos una función en la cual $a \in D_f$; es decir, $f(a)$ está definida, y sin embargo podemos prefijar M tal que $f(a)$ no sea mayor que M.

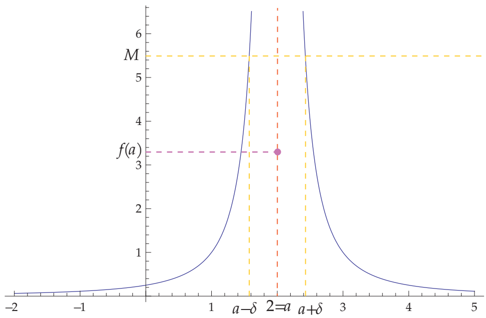


Figura 1.22 $f(a)$ no es mayor que M.

¿Qué sucede aquí? Esta función *crece tanto como queramos* conforme tomamos valores cada vez más cerca de a. Es decir, esta función tiende a ∞ cuando $x \to a$, *independientemente* de lo que pase en el punto a.

Corrijamos la definición de la siguiente manera: Pidamos que para cada M exista $\delta > 0$ tal que si $x \in V_\delta(a) \cap D_f$ **excepto** a, entonces $f(x) > M$.

Al decir que $x \in V_\delta(a) \cap D_f$ excepto a, decimos que x está en la intersección de la *vecindad agujereada* de a, de radio δ, con el dominio de la función. Esto es, que si $x \in \overline{V}_\delta(a) \cap D_f$, entonces $f(x) > M$.

También podemos expresar lo anterior diciendo que si $0 < d(x, a) < \delta$ entonces $f(x) > M$, con $x \in D_f$. Nótese que el *único* punto del intervalo $(a - \delta, a + \delta) = V(a)$ cuya distancia al punto a es 0 es precisamente a. Al pedir $0 < d(x, a)$ estamos excluyendo la posibilidad de que $x = a$.

Tomando en cuanta todo lo anterior, parece que la definición debe quedar:

Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ decimos que $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ si y sólo si para cada M (no importa lo grande que sea) existe $\delta > 0$ tal que si $x \in \overline{V}_\delta(a) \cap D_f$ entonces $f(x) > M$.

En términos de distancia podemos escribir:

$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ si y sólo si, para cada M existe $\delta > 0$ tal que si $x \in D_f$ y $0 < f(x, a) < \delta$ entonces $f(x) > M$.

Usando la distancia *usual* en $\mathbb{R}$:

$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ si y sólo si, para cada M existe $\delta > 0$ tal que si $x \in D_f$ y $0 < |x-a| < \delta$ entonces $f(x) > M$.

Investiga cuáles de las funciones de las figuras (1.18), (1.19), (1.20), (1.21) y (1.22) cumplen con esta definición y explica por qué.

3.1. Ejemplo. Sea $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$ con regla de correspondencia $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$. Nótese que $1 \notin D_f$

Demostremos que $\lim_{x\to 1} \frac{1}{(1-x)^2} = \infty$.

Debemos, dado M, encontrar δ tal que si $0 < d(x,1) < \delta$ entonces $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} > M$. Vemos que esta desigualdad se cumple si

$$(1-x)^2 < \frac{1}{M}$$

es decir, si

$$|1-x| < \frac{1}{\sqrt{M}},$$

elijamos $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$. Si $0 < d(x,1) < \delta$, o lo que es lo mismo, si $0 < |1-x| < \delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$ entonces $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} > M$. ♦

Ejercicio 3.1. Demuestra que $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

Ejercicio 3.2. ¿Cómo definirías $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$?

Ejercicio 3.3. Utilizando la definición del ejercicio anterior demuestra que

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{-(1-x)^2} = -\infty.$$

Se recomienda que los ejercicios 2 y 3 se hagan en grupos de trabajo y que se comparen resultados con los de otros grupos.

1.4. El significado de $\lim_{x \to a} f(x) = L$

Esta expresión se lee *el límite de* $f(x)$ *es* L *(*$L \in \mathbb{R}$*) cuando* x *tiende a* a. Después de lo desarrollado en las tres secciones anteriores parece claro que la expresión quiere decir que podemos encontrar valores *suficientemente* cercanos al punto a que les corresponda bajo la función valores *tan cercanos como queramos* al punto L.

Es decir, que es posible encontrar una vecindad de a tal que a los puntos que pertenezcan a esta vecindad correspondan, bajo la función, puntos en una vecindad *prefijada* de L, sin importar lo pequeña que esta última sea.

Formalmente, podemos expresar lo anterior como

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ si y sólo si para cada vecindad $V_\varepsilon(L)$ de L ($\varepsilon > 0$ es el radio de la vecindad de L) existe alguna vecindad $V_\delta(a)$ de a ($\delta > 0$ es el radio de la vecindad de a) tal que si $x \in V_\delta(a) \cap D_f$ entonces $f(x) \in V_\varepsilon(L)$.

Esta definición se cumple en funciones como en la figura (1.23).

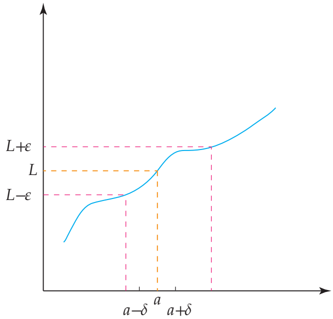


Figura 1.23 Es cierto que el límite de $f(x)$ es L cuando x tiende a a.

Sin embargo, hay funciones que *tienden* a L cuando $x \to a$ y no cumplen con la definición anterior, como en la figura (1.24).

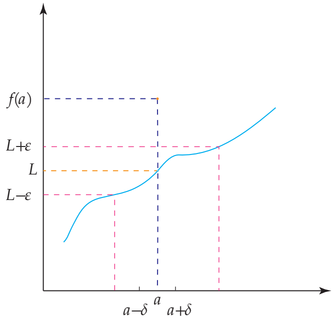


Figura 1.24 También es cierto que el límite de $f(x)$ es L cuando x tiende a a.

Es claro que esta función toma valores arbitrariamente cerca de L conforme tomamos valores suficientemente cerca de a, esto sucede *independientemente* de lo que suceda en

a. Es decir, lo importante es que los puntos en la *vecindad agujerada* de radio δ de a vayan a dar bajo la función dentro de una vecindad prefijada de radio ε de L.

La versión formal de esta definición es:

Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ entonces $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si y sólo si, para toda $V_\varepsilon(L)$ existe alguna $V_\delta(a)$ tal que si $x \in \overline{V}_\delta(a) \cap D_f$ entonces $f(x) \in V_\varepsilon(L)$.

Usando el concepto de distancia:

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ si y sólo si, para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in D_f$ y $0 < d(x, a) < \delta$ entonces $d(f(x), L) < \varepsilon$.

Y con la distancia en $\mathbb{R}$:

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ si y sólo si, para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in D_f$ y $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

4.1. Ejemplo. Sea $f\colon \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$. (Nótese que $3 \notin D_f$). Demostremos que $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$.

Hay que demostrar que, si $\varepsilon > 0$ es un número arbitrario, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in D_f$ y $0 < |x - 3| < \delta$ entonces $\left|\frac{x^2-9}{x-3} - 6\right| < \varepsilon$.

Para $x \neq 3$, la desigualdad anterior es equivalente a

$$\left| \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} - 6 \right| = |(x+3) - 6| < \varepsilon$$

de donde

$$|x-3| < \varepsilon$$

.

Así pues, siendo ε arbitrario, la desigualdad

$$\left| \frac{x^2-9}{x-3} - 6 \right| < \varepsilon$$

se verificará si se cumple $0 < |x-3| < \varepsilon$; es decir, en este caso, $\delta = \varepsilon$. Por lo tanto, $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = 6$ ♦

Surge ahora la siguiente cuestión:

Supongamos que $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$.

Lo aquí planteado es la unicidad del límite. Nos interesa saber qué condiciones debemos imponer ya sea a f, L ó a, para que el límite sea *único*. Trataremos el problema en el siguiente capítulo.

Ejercicio 4.1. Demuestra, a partir de la definición que:

1. $\lim_{x \to 3} (4x+2) = 14$.
2. $\lim_{x \to 3} (x+3) = 6$.
3. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$.

4. $\lim_{x \to a} c = c, \quad c$ constante.

5. $\lim_{x \to a} x = a.$

En cada caso, aclarar cuál es el dominio de la función y trata de dibujar su gráfica.

Ejercicio 4.2. Sea $f \colon \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$. ¿Existe el límite cuando $x \to 0$? Dibuja una gráfica.

Capítulo 2

Unicidad del límite

2.1. Punto de acumulación

En esta sección definiremos los conceptos necesarios para precisar la definición de $\lim_{x \to a} f(x) = L$ de tal manera que el límite sea único.

1.1. Definición. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$. Decimos que $\alpha \in \mathbb{R}$ es un ***punto de acumulación*** de A si para cada vecindad de α existe al menos un punto $x \neq \alpha$ tal que $x \in A$. Es decir, α es un punto de acumulación de A si $\overline{V}(\alpha) \cap A \neq \emptyset$, para toda vecindad de α.

Debemos notar que si α es un punto de acumulación de A no necesariamente $\alpha \in A$.

Por otro lado, el que α no sea punto de acumulación de A quiere decir que existe alguna vecindad de α que no contiene algún punto $x \neq \alpha$ tal que $x \in A$. Es decir, α no es punto de acumulación de A si existe alguna vecindad $V(\alpha)$ de α tal que $\overline{V}(\alpha) \cap A = \emptyset$.

Es posible que $\alpha \in A$ y α no sea punto de acumulación de A.

1.2. Ejemplo. Sea $A = [4, 8]$. En este caso cada $x \in [4, 8]$ es un punto de acumulación de A (¿por qué?) y esos son **todos** los puntos de acumulación de A. También en este caso todos los puntos de acumulación de A son elementos de A.

1.3. Ejemplo. Sea $B = (1, 7)$. En este caso cada elemento de B es un punto de acumulación de B; sin embargo esos no son todos los puntos de acumulación de B, ya que 1 y 7 también lo son (¿por qué?) y no están en B.

1.4. Ejemplo. Sea $C = [0, 1) \cup \{3, 5, 7\}$. En este caso no todos los elementos de C son puntos de acumulación de este conjunto, ya que $3 \in C$, $5 \in C$ y $7 \in C$, y ninguno de ellos es punto de acumulación de C (¿por qué?). Además, hay puntos de acumulación que no están en el conjunto. Tenemos que $1 \notin C$ y 1 es punto de acumulación de C.

2.2. Unicidad del límite

Si en la expresión $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ sucede que a no es punto de acumulación del dominio de la función entonces cualquier número real puede ser el límite de $f(x)$ cuando $x \to a$. Es decir, si L_1 y L_2 son dos números reales distintos y a no es punto de acumulación del dominio de la función, entonces es posible que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1$ y $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_2$.

Para demostrar esto consideremos $\varepsilon > 0$ tal que $V_\varepsilon(L_1) \cap V_\varepsilon(L2) = \emptyset$. Como a no es punto de acumulación de D_f, entonces existe alguna vecindad $V_\delta(a)$ (llamemos δ al radio de esa vecindad) tal que $\overline{V}(a) \cap D_f = \emptyset$.

Así, si $x \in V_\delta(a) \cap D_f$ entonces, por vacuidad[1] $f(x) \in V_\varepsilon(L_1)$ y $f(x) \in V_\varepsilon(L_2)$.

Analicemos el caso en que a es un punto de acumulación del dominio de la función. Demostraremos que si

$$\lim_{x\to a} f(x) = L_1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a} (x) = L_2$$

entonces $L_1 = L_2$.

Supondremos lo contrario, que $L_1 \neq L_2$. El desarrollo de esta hipótesis nos conducirá a una contradicción; esto es, será insostenible afirmar que $L_1 \neq L_2$, por lo tanto tendremos necesariamente que $L_1 = L_2$.

Bien, como $L_1 \neq L_2$ podemos suponer que $L_1 < L_2$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $V_\varepsilon(L_1) \cap V_\varepsilon(L_2) = \emptyset$.

Como $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1$, para $V_\varepsilon(L_1)$ existe $V_{\delta_1}(a)$ tal que si $x \in \overline{V}_{\delta_1}(a)$ entonces $f(x) \in V_\varepsilon(L_1)$.

Asimismo, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_2$ implica que para $V_\varepsilon(L_2)$ existe $V_{\delta_2}(a)$ tal que si $x \in \overline{V}_{\delta_2}(a)$ entonces $f(x) \in V(L_2)$.

Las vecindades $V_{\delta_1}(a)$ y $V_{\delta_2}(a)$ encontradas deben cumplir alguna de estas propiedades $\delta_1 < \delta_2$, $\delta_1 = \delta_2$ ó $\delta_1 > \delta_2$; es decir, $V_{\delta_1}(a) \subseteq V_{\delta_2}(a)$ ó $V_{\delta_2}(a) \subseteq V_{\delta_1}(a)$.

[1]Ver *Conjuntos, lógica y funciones*[3].

Supongamos que $V_{\delta_1}(a) \subseteq V_{\delta_2}(a)$ (si $V_{\delta_2}(a) \subseteq V_{\delta_1}(a)$ la demostración es análoga). Como a es un punto de acumulación de D_f entonces para cualquier vecindad de a, en particular para $V_{\delta_1}(a)$, existe $x \in D_f$ tal que $x \in \overline{V}_{\delta_1}(a) \cap D_f$. Y por estar $V_{\delta_1}(a)$ contenido en $V_{\delta_2}(a)$ tenemos también que $x \in \overline{V}_{\delta_2}(a) \cap D_f$, por lo tanto $f(x) \in V_\epsilon(L_1)$ y $f(x) \in V_\varepsilon(L_2)$, es decir $f(x) \in V_\varepsilon(L_1) \cap V_\varepsilon(L_2)$ lo cual contradice la hipótesis de que $V_\varepsilon(L_1) \cap V_\epsilon(L_2) = \emptyset$. ♦

Entonces, la definición de límite que garantiza la unicidad será:

Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ decimos que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ si y sólo si a es punto de acumulación de D_f y para toda $V_\varepsilon(L)$ existe alguna $V_\delta(a)$ tal que si $x \in \overline{V}_\delta(a) \cap D_f$, entonces $f(x) \in V_\varepsilon(L)$.

O, simplemente,

Sea $f\colon D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y a un punto de acumulación de D_f. Decimos que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ si para toda vecindad V de L existe alguna vecindad W de a tal que $f(\overline{W} \cap D_f) \subseteq V$.

Se deja como ejercicio dar las definiciones usando el concepto de distancia.

Ejercicio 2.1. Encuentra un subconjunto A de $\mathbb{R}$ tal que todos sus puntos sean puntos de acumulación de A.

Ejercicio 2.2. Encuentra un subconjunto B de $\mathbb{R}$ tal que ningún punto de B sea punto de acumulación de B, y sin embargo, que B tenga al menos un punto de acumulación.

Ejercicio 2.3. Sea $f\colon A \to B$. Si $X \subseteq A$ definimos a la imagen del conjunto X como $f(X) = \{y \in B | f(x) = y, \quad x \in X\}$. Sabemos que $\emptyset \subseteq A$. Demuestra que si $Y \subseteq B$ y $Z \subseteq B$ son dos subconjuntos *ajenos* de B, entonces $f(\emptyset) \subseteq Y$ y $f(\emptyset) \subseteq Z$.

Ejercicio 2.4. Construye una función real tal que si $L_1 \neq L_2$, se tenga:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L_1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a} f(x) = L_2.$$

Ejercicio 2.5. Trata de construir una función tal que si $L_1 \neq L_2$ y a es punto de acumulación del dominio, entonces:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L_1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a} f(x) = L_2.$$

Ejercicio 2.6. Da la definición de límite usando el concepto de distancia y, en particular, la distancia en $\mathbb{R}$.

Capítulo 3

Límite y *no* límite

3.1. Negación de las definiciones

Ya sabemos el significado de, por ejemplo,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty,$$

pero ¿qué querrá decir $\lim_{x \to a} f(x) \neq \infty$?

Nos proponemos analizar en este breve capítulo, con base en algunos ejemplos, el significado de esas expresiones. Sabemos que $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ quiere decir que dado M es posible encontrar N tal que si $x > N$ entonces $f(x) > M$.

Para averiguar el significado de $\lim_{x \to \infty} f(x) \neq \infty$ debemos negar la proposición anterior. Lo hacemos de la siguiente manera,

$\lim_{x \to \infty} f(x) \neq \infty$ si *es posible encontrar alguna* M tal que sin importar qué N considere, siempre hay puntos a la derecha de N que van a dar, bajo la función, abajo de M.

1.1. Ejemplo. Sea f la función de la figura (3.1). Para la M

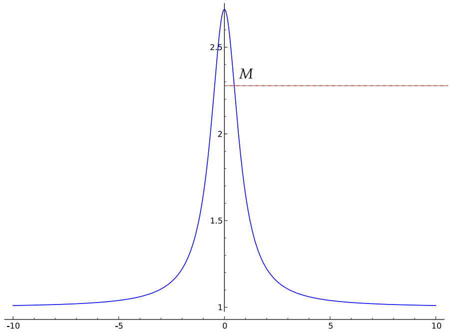


Figura 3.1 ¿La función $f(x) = e^{1/(1+x^2)}$ tiende a ∞ cuando $x \to \infty$?

señalada en la figura se tiene que para cualquier $N \in D_f$ siempre hay puntos $x > N$ tales que $f(x) \leqslant M$. Invitamos al lector a que de un valor a N y localice algunos de estos puntos.

También sabemos que $\lim x \to \infty f(x) = L$ quiere decir que para cualquier vecindad $V_\varepsilon(L)$ existe N tal que si $x > N$ entonces $f(x) \in V_\varepsilon(L)$. Neguemos esta proposición, esto es, $\lim_{x\to\infty} f(x) \neq L$ si *existe alguna* vecindad $V_r(L)$ tal que, sin importar qué N considere, siempre hay puntos $x > N$ tales que $f(x) \notin V_r(L)$.

1.2. Ejemplo. Sea f como en la figura (3.2).

Dada la vecindad señalada en la figura, sin importar qué N tomemos, siempre habrá puntos a la derecha de N cuya imagen no está dentro de $V_r(L)$.

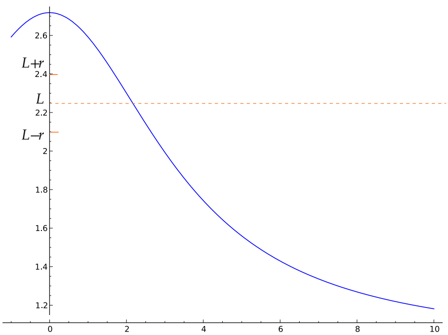


Figura 3.2 ¿La función $f(x) = e^{1/(1+0.05x^2)}$ tiende a L cuando $x \to \infty$?

Otra expresión que analizamos en el capítulo anterior es $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, que quiere decir que para toda M es posible encontrar alguna $V_\delta(a)$ tal que si $x \in \overline{V}_\delta(a) \cap D_f$ entonces $f(x) > M$.

Al negar la proposición anterior obtendremos el significado de $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq \infty$.

Así, $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq \infty$ si *existe* M tal que *para cualquier* vecindad $V_\delta(a)$ es posible encontrar $x \in \overline{V}_\delta(a) \cap D_f$ tal que $f(x) \leqslant M$.

1.3. Ejemplo. Consideremos la función de la figura (3.3).

Señalamos M. Pedimos al lector que dé cualquier vecindad de a y localice, en esa vecindad, al menos un punto que cumpla $x \in \overline{V}_\delta(a) \cap D_f$ y $f(x) \leqslant M$.

Por último, vimos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ quiere decir que para toda $V_\varepsilon(L)$ existe $V_\delta(a)$ tal que si $x \in \overline{V}_\delta(a) \cap D_f$ entonces $f(x) \in V_\varepsilon(L)$.

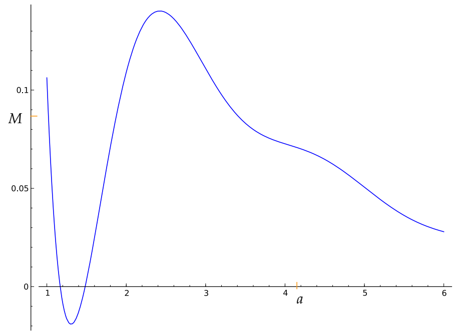


Figura 3.3 ¿Es cierto que la función $f(x) = (x - 1.5 \operatorname{sen}^3 x)/x^3$ tiende a ∞ cuando $x \to a$?

Negar que *para toda* $V_\varepsilon(L)$, *exista* $V_\delta(a)\ldots$, es equivalente a afirmar que *al menos una* $V_\varepsilon(L)$ tiene la propiedad de que *en toda* vecindad $V_\delta(a)$ *existen* puntos $x \in \overline{V}_\delta(a) \cap D_f$ tales que $f(x) \notin V_\varepsilon(L)$.

1.4. Ejemplo. Analicemos la función de la figura (3.4).

La vecindad señalada en la figura (3.4) cumple con la propiedad de que en cualquier vecindad de a hay puntos $x \in \overline{V}_\delta(a) \cap D_f$ tales que $f(x) \notin V_\varepsilon(L)$. De hecho traza una vecindad de a y localiza ahí algún punto cuya imagen no esté dentro de la vecindad prefijada de L.

Ejercicio 1.1. Demuestra que:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \neq 3$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \neq 1538$.

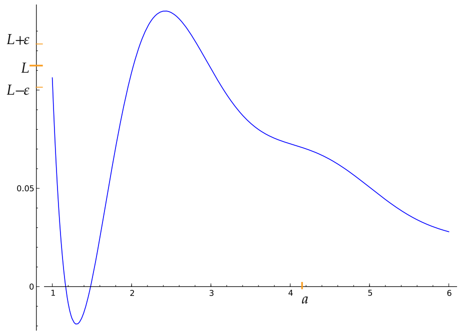


Figura 3.4 Para la vecindad dada de L, verifica que para cualquier radio δ de una vecindad de a, siempre habrá puntos $x \in \overline{V}_\delta(a) \cap D_f$ tales que la función *no* los lleve dentro de la vecindad prefijada de L.

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+1}{x} \neq 3.$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{1-x^2} \neq -80.$

Ejercicio 1.2. Trata de encontrar otras maneras de negar las expresiones estudiadas en el capítulo 1. Este ejercicio deberá hacerse en grupos de trabajo.

Capítulo 4

Teoremas sobre límites

4.1. Enunciados y algunas demostraciones

En este capítulo enunciaremos seis teoremas y demostraremos algunos que nos permitirán calcular límites de funciones algo complicadas.

Al final se incluye una larga lista de ejercicios, es fundamental que el lector los resuelva todos para lograr una fluidez aceptable en el manejo de límites.

El primer teorema dice que si conocemos el límite de f y de g cuando $x \to a$ entonces conocemos el límite de $f + g$ cuando $x \to a$. Lo enunciaremos así:

Teorema 1 *Sean* f *y* g *funciones tales que*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \qquad y \qquad \lim_{x \to a} g(x) = M,$$

si a *es un punto de acumulación de* D_{f+g}*, entonces el límite de* $f+g$ *cuando* $x \to a$ *existe y*

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = L + M.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Queremos mostrar que existe $\delta > 0$ tal que si $x \in D_{f+g}$ y $0 < |x-a| < \delta$ entonces $|(f+g)(x) - (L+M)| < \varepsilon$. Ahora, usando la desigualdad del triángulo[1] tenemos que

$$\begin{aligned} |(f+g)(x) - (L+M)| &= |f(x) + g(x) - L - M| \\ &= |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \\ &= |f(x) - L| + |g(x) - M|, \end{aligned}$$

es decir, que

$$|(f+g)(x) - (L+M)| \leqslant |f(x) - L| + |g(x) - M|. \qquad \blacklozenge$$

Entonces, si logramos que cada uno de los términos de la derecha sea menor que $\varepsilon/2$ para x en una vecindad de a, habremos obtenido el resultado deseado.

Como $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, para cada $\varepsilon/2 > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que si $x \in D_f$ y $0 < |x-a| < \delta_1$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon/2$.

Además, como $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$, para cada $\varepsilon/2 > 0$ existe $\delta_2 > 0$ tal que si $x \in D_f$ y $0 < |x-a| < \delta_2$ entonces $|g(x) - M| < \varepsilon/2$.

Sea $\delta > 0$ un número menor que δ_1 y δ_2. Entonces, si $x \in D_{f+g} = D_f \cap D_g$ y $0 < |x-a| < \delta$, tendremos que:

$$\begin{aligned} |(f+g)(x) - (L+M)| &\leqslant |f(x) - L| + |g(x) - M| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned} \qquad \blacklozenge$$

[1] Ver sección 1.3 de *Funciones reales*[4].

1.1. Ejemplo.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} 1 + \lim_{x\to a} \frac{2}{x} = 1+0 = 1.$$

Lo que el primer teorema dice del límite de la suma, el segundo lo dice de la multiplicación.

Teorema 2 *Sean* f *y* g *funciones tales que*

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \qquad y \qquad \lim_{x\to a} g(x) = M,$$

si a *es un punto de acumulación de* $D_{f\cdot g} = D_f \cap D_g$ *entonces el* $\lim\limits_{x\to a} (fg)(x)$ *existe y*

$$\lim (fg)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = L \cdot M.$$

1.2. Ejemplo. $\lim\limits_{x\to 2} 4x^2 = \lim\limits_{x\to 2} 4 \cdot \lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4\cdot 4 = 16.$

Teorema 3 *Si* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L \neq 0$ *entonces el límite de* $\dfrac{1}{g}$ *existe cuando* $x \to a$ *y* $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{1}{g}\right)(x) = \dfrac{1}{L}$.

Corolario. *Si* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$ *y si* $M \neq 0$ *y* a *es un punto de acumulación del dominio de* $\dfrac{f}{g}$, *entonces* $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$ *existe y*

$$\lim_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L}{M}.$$

1.3. Ejemplo.

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x+5}{4x-2}=\frac{\lim_{x\to 1}(3x+5)}{\lim_{x\to 1}(4x-2)}=\frac{3\lim_{x\to 1}x+5}{4\lim_{x\to 1}x-2}=\frac{18}{4}.$$

Teorema 4 *Si entre los valores correspondientes de las tres funciones* f, g *y* h *se cumplen las desigualdades* $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$ *para toda* $x\in D_f\cap D_g\cap D_h$ *y además* $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} h(x)=L$, *entonces* $\lim_{x\to a} g(x)$ *existe y* $\lim g(x)=L$.

Demostración. Sea $\varepsilon>0$. Queremos encontrar $\delta>0$ tal que si $x\in D_g$ y $0<|x-a|<\delta$ entonces $|g(x)-L|<\varepsilon$.

Como $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$ tenemos que

$$f(x)-L\leqslant g(x)-L\leqslant h(x)-L. \tag{4.1}$$

Como $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$, para cada $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que si $x\in D_f$ y $0<|x-a|<\delta$ entonces $|f(x)-L|<\varepsilon$.

Además, como $\lim\limits_{s\to a} h(x)=L$, para cada $\varepsilon>0$ existe $\delta_1>0$ tal que si $x\in D_h$ y $0<|x-a|<\delta_2$ entonces $|h(x)-L|<\varepsilon$.

Haciendo $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ se verificará que si $x\in D_f\cap D_g\cap D_h$ y $0<|x-a|<\delta$ entonces

$$-\varepsilon<f(x)-L<\varepsilon \quad \text{y} \quad -\varepsilon<h(x)-L<\varepsilon.$$

Esto y la desigualdad (4.1) implican que $-\varepsilon<g(x)-L<\varepsilon$, o sea que $|g(x)-L|<\varepsilon$, es decir $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L$. ♦

Teorema 5 *Si* $f(x)\geqslant 0$ *para toda* $x\in D_f$ *y* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$, *entonces* $L\geqslant 0$.

Demostración. Supongamos que $L < 0$. Sea $0 < \varepsilon < d(L, 0)$ entonces $y \in V_\varepsilon(L)$ implica $y < 0$.

Como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, para cada $\varepsilon > 0$, en particular para $\varepsilon < d(L, 0)$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in \overline{V}_\delta(a) \cap D_f$ entonces $f(x) \in V_\epsilon(L)$.

De aquí, $f(x) < 0$ que contradice la tesis de que $f(x) \geqslant 0$. Por lo tanto $L > 0$. ♦

Teorema 6 *Si* $\lim\limits_{t \to t_0} f(t) = x_0$ *y* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L$ *entonces*

$$\lim_{t \to t_0} (g \circ f)(t) = L.$$

Calcular los límites siguientes:

Ejercicio 1.1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 2x + 5}{x^2 + 1}$.

Ejercicio 1.2. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (2 \operatorname{sen} x - \cos x + \cot x)$.

Ejercicio 1.3. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{\sqrt{2 + x}}$.

Ejercicio 1.4. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(2 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{4}{x^2}\right)$.

Ejercicio 1.5. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x^3 - 2x^2 + 1}{3x^3 - 5}$.

Ejercicio 1.6. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x + 1}{x}$.

Ejercicio 1.7. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+x-1}{2x+5}$.

Ejercicio 1.8. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-2x-1}{x^3+2x}$.

Ejercicio 1.9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^3+2x}$.

Ejercicio 1.10. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$.

Ejercicio 1.11. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x-1}$.

Ejercicio 1.12. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$.

Ejercicio 1.13. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$.

Ejercicio 1.14. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^8-3x^2+2x}{x^2-x-6}$.

Ejercicio 1.15. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt[3]{x^3+1}}$.

Ejercicio 1.16. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$.

Bibliografía

[1] R. Courant y F. John. *Introduction to Calculus and Analysis*. Vol. 1. Interscience Publishers.

[2] N. Haaser, J. La Salle y J. Sullivan. *Introduction to Analysis*. Blaisdell Publishing Co., 1959.

[3] Manuel López Mateos. *Conjuntos, lógica y funciones*. México: mlm-editor, 2018. url: https://clf.mi-libro.club.

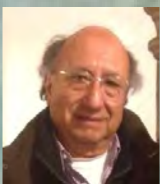
[4] Manuel López Mateos. *Funciones reales*. México: López Mateos Editores, 2018. isbn: 978-6079558390. url: https://funrel.mi-libro.club.

[5] Manuel López Mateos. *Matemáticas Básicas*. 2a. 2018. url: https://matbas.mi-libro.club/ (visitado 10-10-2018).

[6] E. Moise. *Calculus*. Vol. 1. Addison-Wesley Publishing Co., 1967.

[7] N. Piskunov. *Cálculo Diferencial e Integral*. Moscú: Editorial MIR, 1969.

Índice alfabético



Manuel López Mateos inició su actividad docente en 1967 en la Facultad de Ciencias de la UNAM. Ha impartido cursos de Cálculo diferencial e integral, Análisis matemático, Algebra lineal y Topología diferencial, entre otros. En particular, en el año de 1972, impartió, en el entonces Centro de Didáctica de la UNAM, Cursos de capacitación para la primera generación de profesores de matemáticas del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH) de la UNAM. Ha traducido más de 15 importantes libros de texto de matemáticas. En el año de 2003, fue el director fundador de la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma Benito Juárez de Oaxaca.

López Mateos editores

ISBN 978-607-95583-8-3